ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

Лекция №19

План лекции:
1. Истечение из сопла Лаваля
2. Общие закономерности для течения в канале
3. Температура адиабатного торможения
4. Вопросы для дистанционного освоения лекции

1. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ СОПЛА ЛАВАЛЯ

На прошлой лекции мы получили соотношения, позволяющие определить максимальный расход газа через суживающееся сопло, и показали, что скорость потока на выходе из такого сопла не может превысить скорость звука. Для этого мы воспользовались, установленными нами ранее, законами сохранения массы и энергии в следующем виде:

$$\boxed{\begin{array}{l} dG = 0 \\ wdw + vdp = 0 \end{array}}, \qquad (1)$$

где $G = wF/v$ - секундный массовый расход газа $[кг/с]$; F - площадь поперечного сечения канала $[м^2]$; w среднерасходная скорость в соответствующем поперечном сечении $[м/с]$; v, p - средний по сечению удельный объём $[м^3/кг]$ и давление $[Па]$ газа в том же поперечном сечении.

Проанализируем эти уравнения более подробно. Рассмотрим уравнение сохранения массы. Это уравнение в гидродинамике называют также **уравнением неразрывности потока или уравнением сплошности**, поскольку оно показывает, что при течении в канале ни при каких обстоятельствах не может возникнуть областей, где не было бы газа (жидкости). Подставим в это уравнение определение массового расхода:

$$\begin{array}{l} d\left(\dfrac{wF}{v}\right) = -\dfrac{wF}{v^2}dv + \dfrac{w}{v}dF + \dfrac{F}{v}dw = 0 \Big| \cdot v, /w, /F \\ \boxed{\dfrac{dF}{F} + \dfrac{dw}{w} - \dfrac{dv}{v} = 0} \end{array}. \qquad (2)$$

Полученное уравнение представляет собой **уравнение неразрывности в дифференциальной форме.** Комплекс dw/w можно выразить из уравнения сохранения энергии (1):

$$\frac{dw}{w} = -\frac{vdp}{w^2}. \qquad (3)$$

В адиабатных условиях истечения без трения, с использованием определения показателя изоэнтропы: $k = -\dfrac{v}{p}\left(\dfrac{dp}{dv}\right)_s$, комплекс $\dfrac{dv}{v}$ преобразуется к виду:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dp}{kp}. \qquad (4)$$

Подставляя выражения (3), (4) в уравнение (2) окончательно получим:

$$\boxed{\frac{dF}{F} = \left(\frac{kpv - w^2}{kpw^2} \right) dp}, \tag{5}$$

или с учётом определения скорости звука и числа Маха:

$$\boxed{\frac{dF}{F} = \left(\frac{a^2 - w^2}{w^2} \right) \frac{dp}{kp}; \quad \frac{dF}{F} = \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \frac{dp}{kp}} \tag{6}$$

Число Маха представляет собой отношение скорости течения к местной скорости звука. Значение $M < 1$ соответствует течению с дозвуковыми скоростями $w < a$, а $M > 1$ - течению со скоростями, превышающими скорость звука $w > a$.

Уравнение (6) связывает изменение площади поперечного сечения канала (при адиабатном течении без трения и без совершения технической работы) с изменением давления в потоке и с числом Маха.

Преобразуем комплекс dp/kp к виду $vdp/kpv = vdp/a^2$, и, используя уравнение сохранения энергии (1), получим $dp/kp = -M^2\, dw/w$. Тогда уравнение (6) можно записать так:

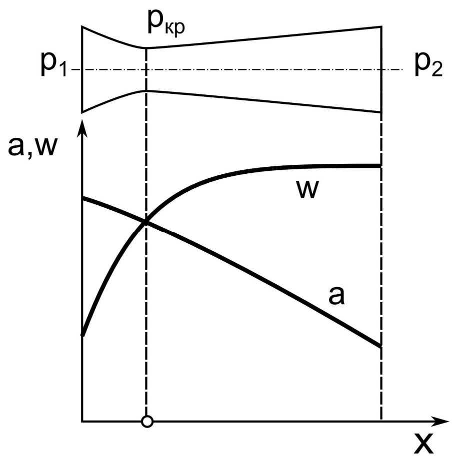
$$\boxed{\frac{dF}{F} = \left(M^2 - 1 \right) \frac{dw}{w}}. \tag{7}$$

Из уравнения (6) следует, что при дозвуковых скоростях течения $M < 1$ сужение канала $dF < 0$ соответствует снижению давления в потоке вдоль канала $dp < 0$, т.е. случаю обычного суживающегося сопла; уравнение (7) показывает, что скорость потока увеличивается $dw > 0$. Если же при дозвуковом течении канал расширяется $dF > 0$, то скорость потока снижается $dw < 0$, а давление в потоке вдоль канала возрастает $dp > 0$. **Расширяющиеся каналы, применяемые для торможения дозвукового потока, т.е. для превращения кинетической энергии потока в потенциальную энергию сжатого газа, носят название диффузоров**. Диффузоры находят широкое применение в самых различных областях техники.

Уравнения (6) и (7) позволяют сделать важные выводы и для случая течения потока со сверхзвуковой скоростью $M > 1$. Из этих уравнений следует, что при $M > 1$ течение в расширяющемся канале $dF > 0$ происходит с уменьшением давления вдоль потока $dp < 0$ и с увеличением скорости $dw > 0$, и, наоборот, сверхзвуковой поток в суживающемся канале $dF < 0$ замедляется $dw < 0$, а его давление возрастает $dp > 0$. Таким образом, профили сопла и диффузора для сверхзвукового потока «меняются местами» - сверхзвуковое сопло представляет собой расширяющийся канал, а сверхзвуковой диффузор - сужающийся канал.

Из этого анализа становится очевидным, как осуществить дальнейшее ускорение потока, который при $p_2 \le p_{кр}$ приобрел на выходе из суживающегося сопла звуковую скорость; для этого сопло должно быть спрофилировано таким образом, чтобы канал суживался до тех пор, пока давление в канале не станет равным критическому давлению истечения $p_{кр}$; скорость потока становится равной местной скорости звука. За этим сечением канал должен быть выполнен расширяющимся. В соответствии со сказанным выше, поток перейдет через скорость звука и будет продолжать ускоряться в расширяющейся части сопла. Таким образом, для ускорения потока будет использован весь перепад давления от давления на входе в сопло p_1 до давления на выходе $p_2 < p_{кр}$, а не только часть этого перепада от p_1 до $p_{кр}$, реализуемая в суживающемся дозвуковом сопле.

Такое комбинированное сопло, состоящее из суживающейся и расширяющейся частей, впервые было применено для получения сверхзвуковых скоростей истечения газа шведским инженером Лавалем, поэтому сопла такого типа называют **соплами Лаваля**.



На рисунке представлен профиль конического сопла Лаваля и графики изменения скорости потока и местной скорости звука по длине сопла. Как и для суживающегося сопла скорость истечения определяется только площадью поперечного сечения канала и не зависит от его длины. Длина суживающейся части сопла, выбирается минимальной, для минимизации потерь на трение. Длина расширяющейся, сверхзвуковой части сопла, имеющей обычно коническую форму, выбирается такой, чтобы угол раствора сопла не превышал 11-12°; при больших углах раствора возникает опасность отрыва потока от стенок сопла.

Сопло Лаваля рассчитывается таким образом, чтобы давление в выходном сечении сопла p_2 было равно давлению внешней среды p_c. Режимы работы сопла, в которых давление среды отличается от расчетного давления, называют нерасчетными.

2. ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ

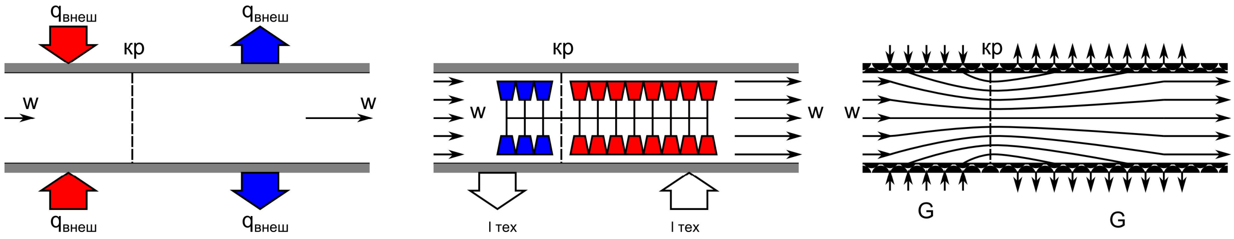
До сих пор мы рассматривали адиабатные течения, не совершающие работы против действия внешних сил, за исключением силы давления. В общем же виде течение может быть не адиабатным, поток может совершать работу (например, вращать колесо турбины), преодолевать действие силы тяжести и т.д. В этом случае уравнение сохранения энергии для потока может быть записано следующим образом:

$$wdw = -vdp - gdz - dl_{тех} - dl_{тр}. \tag{8}$$

Используя рассуждения аналогичные тем, что были приведены при выводе уравнений (6) и (7), можно получить общее уравнение для течения газа (жидкости) в канале:

$$\boxed{\left(M^2-1\right)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{1}{vc_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dq_{внеш} - \frac{1}{a^2}dl_{тех} - \left(\frac{1}{vc_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p + \frac{1}{a^2}\right)dl_{тр} - \frac{g}{a^2}dz} \tag{9}$$

Полученное соотношение (9) при $q_{внеш} = 0,\ l_{тех} = 0,\ l_{тр} = 0,\ dz = 0$ преобразуется, как и следовало ожидать к уравнению (7). В отличие от уравнения (7) новое соотношение позволяет выявить новые способы получения сверхзвуковых потоков, помимо уже рассмотренного сопла Лаваля.



Так сверхзвуковой поток может быть получен в так называемом **тепловом сопле** – канале постоянного поперечного сечения $dF = 0$ при $l_{тех} = 0,\ l_{тр} = 0,\ dz = 0$. В этом случае поток ускоряется за счет подвода или отвода теплоты через стенки канала:

$$\boxed{\left(M^2 - 1\right)\frac{dw}{w} = -\frac{1}{vc_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dq_{внеш}}. \qquad (10)$$

Поскольку всегда $c_p > 0$ и обычно $\left(\partial v/\partial T\right)_p > 0$, из уравнения (10) следует, что в дозвуковом потоке $M < 1$ подвод теплоты $dq_{внеш} > 0$ приводит к ускорению потока $dw > 0$, отвод теплоты - к его торможению; этого и следовало ожидать: при подводе теплоты газ в потоке расширяется и его скорость увеличивается. Соответственно в сверхзвуковом потоке $M > 0$ подвод теплоты будет приводить к торможению потока, а отвод - к его ускорению. Очевидно, что до тех пор, пока скорость потока не достигнет скорости звука, к нему нужно подводить теплоту. После того как скорость потока станет звуковой, дальнейшее ускорение потока достигается за счет отвода теплоты.

Нужно отметить, что теплота может подводиться к потоку (или отводиться от него) не только извне, через стенки трубы, но и за счет тепла химической реакции, происходящей в потоке газа.

Для течения в трубе постоянного сечения $dF = 0$ при отсутствии внешнего теплообмена $q_{внеш} = 0$, отсутствии трения $dl_{тр} = 0$, но при наличии совершаемой потоком (или подводимой к потоку от внешнего источника) технической работы из (9) получаем:

$$\boxed{\left(M^2 - 1\right)\frac{dw}{w} = -\frac{dl_{тех}}{a^2}} \qquad (11)$$

Из этого соотношения следует, что дозвуковой поток, совершающий техническую работу (например, вращающий турбинное колесо или протекающий, между электродами магнитогидродинамического генератора в поперечном магнитном поле), ускоряется. Соответственно подвод технической работы к потоку извне будет приводить к торможению последнего; этот вывод является несколько неожиданным.

Это означает, например, что если в поток поместить крыльчатку, вращаемую от внешнего источника работы, то вращение этой крыльчатки будет приводить не к ускорению, а к замедлению потока. Подвод к сверхзвуковому потоку технической работы будет приводить к ускорению потока, а совершение потоком работы - к его замедлению.

На рассмотренном принципе основана работа так называемого **механического сопла**[1] - теплоизолированной трубы постоянного сечения, в которой дозвуковой поток, движущийся без трения, ускоряется за счет отдачи работы на лопатках турбинных колес, размещенных в трубе; после того как поток достигает скорости звука, он поступает на лопатки нагнетателя, вращаемого от внешнего источника работы.

К рассмотренным случаям течения примыкает процесс течения в вертикальной трубе постоянного сечения $dz \neq 0$ при $q_{внеш} = 0$, $l_{тех} = 0$, $l_{тр} = 0$. Для этого случая из (9) получаем:

$$\boxed{\left(M^2 - 1\right)\frac{dw}{w} = -\frac{g}{a^2}dz} \tag{12}$$

Из этого соотношения следует, что дозвуковой поток газа, движущийся вверх $dz > 0$, ускоряется, а сверхзвуковой поток, движущийся вверх, замедляется. Эти выводы представляют интерес для анализа процессов истечения природного газа из скважин (сечение которых постоянно по высоте).

Случай течения с трением стоит несколько особняком по сравнению с рассмотренными выше видами течений: если все остальные дифференциалы, стоящие в правой части уравнения (9), $dq_{внеш}$, $dl_{тех}$, dz, dF могут быть и положительными и отрицательными, то работа на преодоление сил трения может быть, естественно, только положительной, $dl_{тр} > 0$. Из уравнения:

$$\boxed{\left(M^2 - 1\right)\frac{dw}{w} = -\left(\frac{1}{vc_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p + \frac{1}{a^2}\right)dl_{тр}} \tag{13}$$

следует, что дозвуковой поток с трением ускоряется. Этот вывод не является неожиданным: поскольку работа трения превращается в теплоту, этот случай эквивалентен рассмотренному выше случаю течения с трением с подводом теплоты извне.

Очевидно, что при адиабатном течении с трением в трубе постоянного сечения поток может ускоряться до звуковой скорости, но перейти через скорость звука он не сможет, поскольку для этого нужно было бы отводить теплоту от потока, а теплота трения всегда подводится к потоку. Невозможность в рассматриваемых условиях перехода через скорость звука носит название **кризиса течения**.

Следует рассмотреть еще один тип сопла - так называемое **расходное сопло**, принцип действия которого состоит в следующем. Если ввести представление о плотности потока в канале как о расходе газа через единицу площади поперечного сечения канала:

$$j = \frac{G}{F}, \tag{14}$$

то из рассмотрения обычного **геометрического сопла Лаваля** следует, что в дозвуковой (сужающейся) части сопла величина j растет, достигает максимума в критическом сечении сопла и затем в сверхзвуковой (расширяющейся) части сопла уменьшается.

---

[1] Рассмотренные ранее сопла, в которых в соответствии с уравнением (7) изменение скорости потока достигается изменением площади сечения сопла, называют геометрическими соплами.

В трубе постоянного сечения $F = const$ этого же эффекта можно добиться изменением расхода газа G путем вдувания или отсоса этого газа через отверстия в боковой поверхности трубы. Если увеличивать расход, вдувая газ, то плотность потока j будет возрастать, что эквивалентно сужению геометрического сопла. Если, после того как скорость газа достигнет звуковой, осуществить отвод части газа через боковую поверхность трубы, то j будет уменьшаться и поток будет продолжать ускоряться, ибо это эквивалентно расширению геометрического сопла.

Как видно из изложенного, знак воздействия, которое нужно оказать на поток для его ускорения (подвод или отвод теплоты, работы, вещества и т.д.), меняется при переходе через скорость звука в критическом сечении сопла. Так, в тепловом сопле на его дозвуковом участке $dq_{внеш} > 0$ (подвод теплоты), а на сверхзвуковом участке $dq_{внеш} < 0$ (отвод теплоты). Уравнение (9), позволяющее установить знак воздействия в зависимости от М, носит название **закона обращения воздействий**.

3. ТЕМПЕРАТУРА АДИАБАТНОГО ТОРМОЖЕНИЯ

Заканчивая рассмотрение адиабатных процессов течения, остановимся на понятии **температуры адиабатного торможения**. Как известно, для обратимого адиабатного течения имеет место равенство:

$$h + \frac{w^2}{2} = const \qquad (15)$$

Если газ в потоке можно рассматривать как идеальный, а его теплоемкость считать постоянной, не зависящей от температуры, то, поскольку энтальпия такого газа (отсчитываемая от 0К) $h = c_p T$, уравнение (15) может быть записано в следующем виде:

$$T + \frac{w^2}{2c_p} = const \qquad (16)$$

Из уравнения (16) видно, если обратимый адиабатный поток идеального газа с постоянной теплоемкостью, имеющий температуру T, полностью заторможен $w = 0$, то температура заторможенного потока (ее называют температурой адиабатного торможения T^*)

$$T^* = T + \frac{w^2}{2c_p} \qquad (17)$$

Из (17) видно, что всегда $T^* > T$. Поскольку для идеального газа $k = c_p / c_v$ и в соответствии с уравнением Майера $c_p - c_v = R$, то:

$$\boxed{T^* = T + \frac{k-1}{2kR} w^2 = T\left(1 + \frac{k-1}{2}\frac{w^2}{kRT}\right) = T\left(1 + \frac{k-1}{2}\frac{w^2}{a^2}\right) = T\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)} \qquad (18)$$

Понятие о температуре адиабатного торможения широко используется в различных аэрогазодинамических расчетах. Всякий измерительный прибор, помещенный в поток, покажет температуру, близкую к температуре адиабатного торможения.

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ ДИСТАНЦИОННОГО ОСВОЕНИЯ ЛЕКЦИИ

1. Дайте определение диффузора.
Ответ:
2. Запишите уравнение, связывающее площадь поперечного сечения канала и скорость потока сжимаемого газа в этом сечении для адиабатного истечения без трения.
Ответ:
3. Изобразите форму стенок сопла Лаваля.
Ответ:
4. Приведите примеры негеометрических сверхзвуковых сопел.
Ответ:
5. Запишите формулу для определения температуры торможения.
Ответ:
Фамилия Имя Отчество:
Группа:
Подпись:
Дата: